# Государственная (итоговая) аттестация по образовательным программам основного общего образования по МАТЕМАТИКЕ

## Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для проведения в 2024 году государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ

### Пояснения к демонстрационному варианту экзаменационной работы

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать возможность участнику экзамена и широкой общественности составить представление о структуре будущей экзаменационной работы, числе и форме заданий, а также их уровне сложности. Эти сведения дают возможность выработать стратегию подготовки к сдаче экзамена по математике.

Задания демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольные измерительные материалы в 2024 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов — в кодификаторах элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников организаций образования для проведения государственной итоговой аттестации в 2024 году по математике.

К каждому заданию приведены варианты решения.

Приведённые критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений.

### Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух модулей: «Алгебра» и «Геометрия». В каждом модуле две части, которые различаются по содержанию, сложности и числу заданий, соответствующих проверке на базовом и повышенном уровнях сложности.

Модуль «Алгебра» содержит 12 заданий: в части 1 — 9 заданий (1– 9) с кратким ответом; в части 2 — 3 задания (14 – 16) с развернутым ответом.

Модуль «Геометрия» содержит 6 заданий: в части 1 — 4 задания (10 – 13) с кратким ответом; в части 2 — 2 задания (17 – 18) с развернутым ответом.

Всего в работе 18 заданий, из которых 13 заданий базового уровня, 4 задания повышенного уровня и 1 задание высокого уровня сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Правильное решение каждого из заданий 1- 13 оценивается одним баллом.

Правильное решение каждого из заданий 14, 15, 17, 18 - 2 баллами, задание 16 – 3 баллами.

Максимальный первичный балл за выполнение всей работы —24 балла. Из них на модуль « Алгебра» приходится 16 баллов, а на модуль «Геометрия» - 8 баллов.

Для успешного прохождения итоговой аттестации необходимо набрать в сумме минимальное количество баллов, устанавливаемое ежегодно специальной Комиссией Министерства просвещения ПМР, из которых необходимое количество баллов устанавливается отдельно для модуля «Геометрия».

Задание с кратким ответом (1 - 13) считается выполненным, если в бланке ответов № 1 зафиксирован верный ответ в виде одной цифры, которая соответствует номеру правильного ответа, числа или последовательности цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1. Если получилась обыкновенная дробь, ответ запишите в виде десятичной.

Ответ: *–0,8* .


Задания 14–18 с развёрнутым ответом, в числе которых четыре задания повышенного и одно задание высокого уровней сложности. Решения заданий части 2 и ответы к ним запишите на бланке ответов № 2. Задания можно выполнять в любом порядке, начиная с любого модуля. Текст задания переписывать не надо, необходимо только указать его номер

Сначала выполняйте задания части 1. Начать советуем с тех заданий, которые вызывают у Вас меньше затруднений, затем переходите к другим заданиям. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

При выполнении части 1 все необходимые вычисления, преобразования выполняйте в черновике. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Если задание содержит рисунок, то на нём непосредственно в тексте работы можно выполнять необходимые Вам построения. Рекомендуем внимательно читать условие и проводить проверку полученного ответа.

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами, выданными вместе с вариантом.

Все бланки регистрации и ответов заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

***Желаем успеха!***

# СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

## АЛГЕБРА

- Формула корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

- Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня $x_1$ и $x_2$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

- Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет один корень $x_0$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- Формула $n$ - го члена арифметической прогрессии $(a_n)$, первый член которой равен $a_1$ и разность равна $d$:

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

- Формула суммы $n$ первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

- Формула $n$ - го члена геометрической прогрессии $(b_n)$, первый член которой равен $b_1$ и разность равна $q$:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

- Формула суммы $n$ первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{(q^n - 1)b_1}{q - 1}$$

**Таблица квадратов двузначных чисел**

| | | **Единицы** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **Десятки** | **1** | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 |
| | **2** | 400 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 | 676 | 729 | 784 | 841 |
| | **3** | 900 | 961 | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 |
| | **4** | 1600 | 1681 | 1764 | 1849 | 1936 | 2025 | 2116 | 2209 | 2304 | 2401 |
| | **5** | 2500 | 2601 | 2704 | 2809 | 2916 | 3025 | 3136 | 3249 | 3364 | 3481 |
| | **6** | 3600 | 3721 | 3844 | 3969 | 4096 | 4225 | 4356 | 4489 | 4624 | 4761 |
| | **7** | 4900 | 5041 | 5184 | 5329 | 5476 | 5625 | 5776 | 5929 | 6084 | 6241 |
| | **8** | 6400 | 6561 | 6724 | 6889 | 7056 | 7225 | 7396 | 7569 | 7744 | 7921 |
| | **9** | 8100 | 8281 | 8464 | 8649 | 8836 | 9025 | 9216 | 9409 | 9604 | 9801 |

## ГЕОМЕТРИЯ

- Сумма углов выпуклого $n$-угольника равна $180°$(n-2).

- Радиус $r$ окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной $a$, равен $\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

- Радиус $R$ окружности, описанной около правильного треугольника со стороной $a$, равен $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

- Для треугольника $ABC$ со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где $R$ −радиус описанной окружности.

- Для треугольника $ABC$ со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

- Формула длины $l$ дуги окружности радиуса $R$:

$$l = 2\pi R.$$

- Формула длины $l$ дуги окружности радиуса $R$, на которую опирается центральный угол в $\varphi$ градусов:

$$l = \frac{2\pi R\varphi}{360}.$$

- Формула площади $S$ параллелограмма со стороной $a$ и высотой $h$, проведённой к этой стороне:

$$S = ah.$$

- Формула площади $S$ треугольника со стороной $a$ и высотой $h$, проведённой к этой стороне:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

- Формула площади $S$ трапеции с основаниями $a, b$ и высотой $h$:

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

- Формула площади $S$ круга радиуса $R$:

$$S = \pi R^2.$$

## Часть 1

***Ответами к заданиям 1–13 являются цифра, число или последовательность цифр. Ответ следует записать в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.***

### *Модуль «Алгебра»*

**1.** ***Действия с обыкновенными и десятичными дробями. Степени.***

Найдите значение выражения $9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2-19\cdot\frac{1}{9}$.

*Решение.*

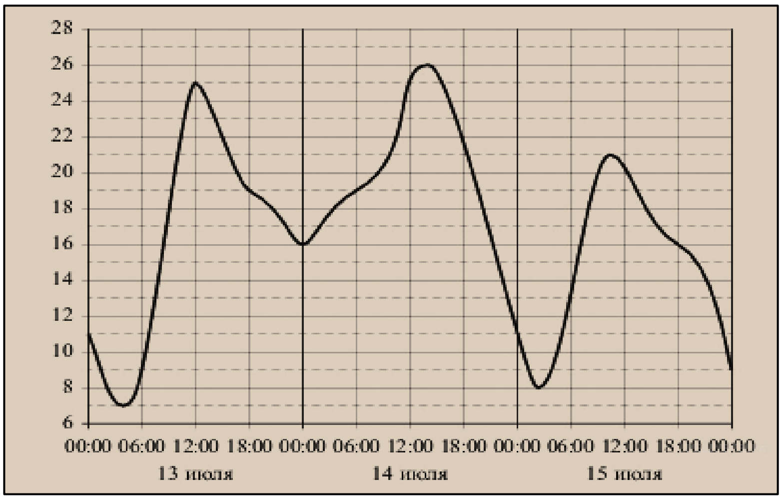
Вынесем общий множитель за скобки:

$$9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2-19\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\left(9\cdot\frac{1}{9}-19\right)=\frac{1}{9}\cdot(-18)=-2.$$

Ответ: −2.

**2.** ***Определение и вычисление величин по графику.***

На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку **разность** между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 15 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.




*Решение.*

Из графика видно, что 15 июля наибольшая температура составляла 21 °С, а наименьшая 8 °С. Их разность составляет 13 °С.

Ответ: 13.

**3.** **Решение уравнений и их систем.**

Решите систему уравнений $\begin{cases}4x-2y=2,\\2x+y=5.\end{cases}$

**В ответ запишите $x+y$.**

*Решение.*

Разделим обе части первого уравнения на 2 и решим систему методом подстановки:

$$\begin{cases}4x-2y=2,\\2x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=1,\\2x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1,\\2x+2x-1=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2x-1,\\4x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2,\\x=1,5.\end{cases}$$

Искомая сумма равна 3,5.

Ответ: 3,5.

## 4. Простейшие задачи на проценты.

Тетрадь стоит 24 рубля. Сколько рублей заплатит покупатель за 60 тетрадей, если при покупке больше 50 тетрадей магазин делает скидку 10% от стоимости всей покупки?

*Решение.*

За 60 тетрадей покупатель заплатил бы $60 \cdot 24 = 1440$ рублей. Скидка составит 10%, т. е. 144 рубля. Значит, покупатель заплатит $1440 - 144 = 1296$ рублей.

Ответ: 1296.

## 5. Начала теории вероятностей.

В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из России, 6 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из России.

*Решение.*

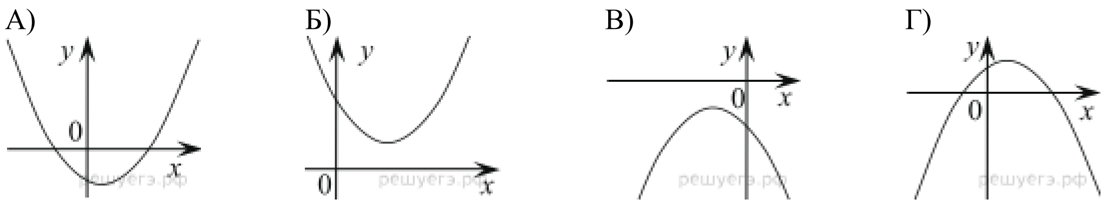
Всего спортсменов $11 + 6 + 3 = 20$ человек. Поэтому вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из России равна $\frac{11}{20} = 0,55.$

Ответ: 0,55.

## 6. Графики функций.

На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Для каждого графика укажите соответствующие ему значения коэффициента $a$ и дискриминанта $D$.

**Графики**




**Знаки чисел**

**1) $a > 0, D > 0$ 2) $a > 0, D < 0$ 3) $a < 0, D > 0$ 4) $a < 0, D < 0$**

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

| А | Б | В | Г |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Решение.*

График функции $y = ax^2 + bx + c$ — парабола. Ветви этой параболы направлены вверх, если $a > 0$ и вниз, если $a < 0.$ При $D > 0$ уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, то есть график функции $y = ax^2 + bx + c$ имеет два пересечения с осью абсцисс. Если $D < 0$, то корней нет, а соответственно график не пересекает ось абсцисс.

Таким образом, получаем ответ: А — 1, Б — 2, В — 4, Г — 3.

Ответ: 1243.

**7. Арифметическая и геометрическая прогрессии.**

Даны пятнадцать чисел, первое из которых равно 6, а каждое следующее больше предыдущего на 4. Найти пятнадцатое из данных чисел.

*Решение.*

Последовательность, описанная в условии, образует арифметическую прогрессию с первым членом, равным шести, и разностью 4. Пятнадцатый член данной прогрессии равен: $a_{15} = a_1 + 14d = 6 + 4 \cdot 14 = 6 + 56 = 62.$

Ответ: 62.

**8. Вычисление алгебраических выражений**

Упростите выражение $(2-c)^2 - c(c+4)$, найдите его значение при $c = 0,5$. В ответ запишите полученное число.

*Решение.*

Упростим выражение:

$(2-c)^2 - c(c+4) = 4 - 4c + c^2 - c^2 - 4c = -8c + 4.$

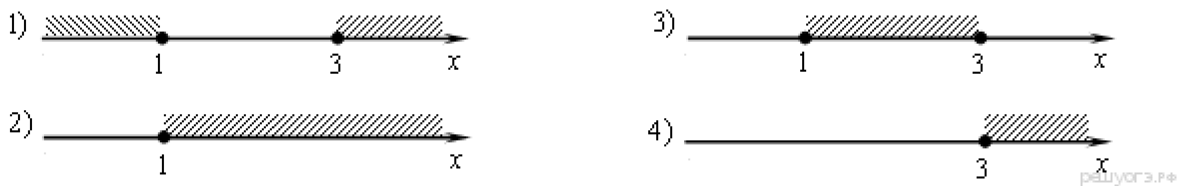
Найдём значение полученного выражения при $c = 0,5$:

$-8 \cdot 0,5 + 4 = -4 + 4 = 0.$

Ответ: 0.

**9. Решение неравенств.**

На каком рисунке изображено множество решений неравенства $x^2 - 4x + 3 \geq 0$? *В ответе укажите номер правильного варианта.*




*Решение.*

Решим неравенство: $x^2 - 4x + 3 \geq 0.$ Корнями уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ являются числа 1 и 3. Поэтому

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3, \\ x \leq 1. \end{array}\right.$$

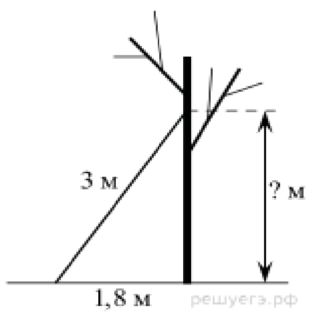
Множество решений неравенства изображено на рис. 1.

Правильный ответ указан под номером 1.

Ответ: 1.

***Модуль «Геометрия»***

**10. Практические задачи по геометрии.**




Лестницу длиной 3 м прислонили к дереву. На какой высоте (в метрах) находится верхний её конец, если нижний конец отстоит от ствола дерева на 1,8 м?

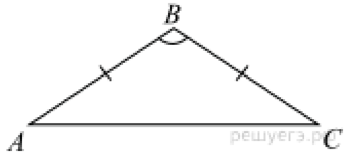
*Решение.*

Задача сводится к нахождению катета прямоугольного треугольника, по теореме Пифагора он равен:

$$\sqrt{3^2-1,8^2}=\sqrt{9-3,24}=2,4.$$

Ответ: 2,4.

**11. <u>Треугольники, четырехугольники, окружность, круг и их элементы.</u>**




В треугольнике $ABC$ известно, что $AB=BC$, $\angle ABC=108^\circ$. Найдите угол $BCA$. Ответ дайте в градусах.

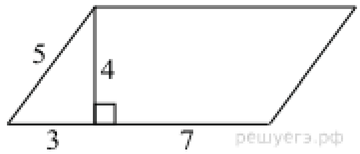
*Решение.*

Треугольник $ABC$ - равнобедренный,

следовательно, $\angle BAC=\angle BCA=\dfrac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ$

Ответ: 36

**12. <u>Площади фигур.</u>**




Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.

*Решение.*

Площадь параллелограмма равна произведению длины основания на высоту: $S=(3+7)\cdot 4=40.$

Ответ: 40.

**13. <u>Анализ геометрических высказываний.</u>**

Укажите номера верных утверждений.

1) Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины, противолежащей основанию, делит основание на две равные части.

2) В любом прямоугольнике диагонали взаимно перпендикулярны.

3) Для точки, лежащей на окружности, расстояние до центра окружности равно радиусу.

*Если утверждений несколько, запишите их номера в порядке возрастания.*

*Решение.*

Проверим каждое из утверждений.

1) «Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины, противолежащей основанию, делит основание на две равные части» — *верно* по свойству равнобедренного треугольника.

2) «В любом прямоугольнике диагонали взаимно перпендикулярны» — *неверно*, это утверждение справедливо исключительно для ромба, а не для прямоугольника.

3) «Для точки, лежащей на окружности, расстояние до центра окружности равно радиусу» — *верно*, т. к. окружность — множество точек, находящихся на заданном расстоянии от данной точки.

Ответ: 13.

## Часть II

***Для записи решений и ответов на задания 14- 18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (14,15 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.***

***Модуль «Алгебра»***

**14. <u>Алгебраические выражения, уравнения, неравенства и их системы.</u>**

Решите систему уравнений $\begin{cases}(x-4)(y-6)=0,\\ \dfrac{y-4}{x+y-8}=2.\end{cases}$

*Решение.*

<u>*1 способ*</u>

Выразим одну переменную через другую из второго уравнения и подставим полученное выражение в первое уравнение

$$\begin{cases}(x-4)(y-6)=0,\\ \dfrac{y-4}{x+y-8}=2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-4)(y-6)=0,\\ (y-4)=2x+2y-16,\\ x+y-8\neq 0;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-4)(-2x+12-6)=0,\\ y=-2x+12,\\ x+y-8\neq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3,\\ y=6.\end{cases}$$

Заметим, что пара корней (4; 4) не является корнями уравнения, потому что при $x=4, y=4$ знаменатель второго уравнения обращается в ноль.

<u>*2 способ*</u>

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом имеет смысл.

$$\begin{cases}(x-4)(y-6)=0,\\ \dfrac{y-4}{x+y-8}=2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-4=0,\\ y-6=0'\end{array}\right.\\ \dfrac{y-4}{x+y-8}=2;\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-4=0,\\ \dfrac{y-4}{x+y-8}=2,\end{cases}\\ \begin{cases}y-6=0,\\ \dfrac{y-4}{x+y-8}=2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4,\\ \dfrac{y-4}{4+y-8}=2,\end{cases}\\ \begin{cases}y=6,\\ \dfrac{6-4}{x+6-8}=2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4,\\ \dfrac{y-4}{y-4}=2,\end{cases}\\ \begin{cases}y=6,\\ \dfrac{2}{x-2}=2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}y=6,\\ x-2=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=6,\\ x=3.\end{cases}$$

Ответ: (3; 6).

**15. <u>Текстовые задачи.</u>**

Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 130 литров она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 136 литров?

*Решение.*

Пусть вторая труба пропускает $x$ литров воды в минуту, $x > 2$, тогда первая труба пропускает $x - 2$ литра в минуту.

Составим таблицу по данным задачи:

| | Производительность(л/мин) | Время (мин) | Объём работ (л) |
|---|---|---|---|
| Первая труба | $x-2$ | $\frac{136}{x-2}$ | 136 |
| Вторая труба | $x$ | $\frac{130}{x}$ | 130 |

Так как вторая труба заполнила резервуар на 4 минуты быстрее, получаем уравнение:

$$\frac{136}{x-2} - \frac{130}{x} = 4$$

Решим уравнение:

$$\frac{136x - 130x + 260 - 4x^2 + 8x}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7x - 130}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow$$

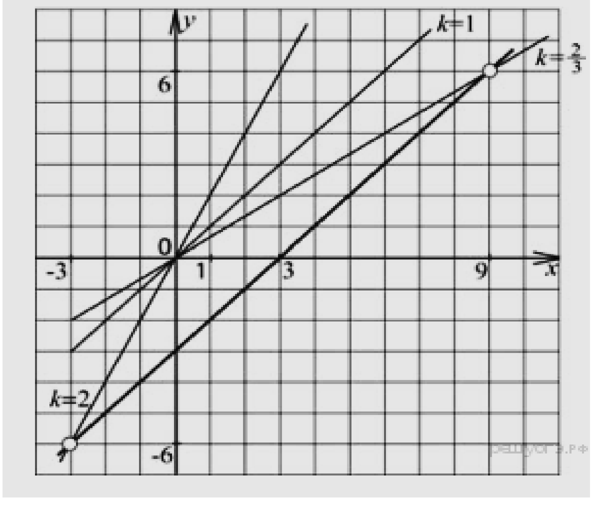
$$\Leftrightarrow \frac{(2x+13)(x-10)}{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x + 13 = 0, \\ x - 10 = 0, \end{array}\right. \\ x(x-2) \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -6{,}5, \\ x = 10, \end{array}\right. \\ x(x-2) \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6{,}5, \\ x = 10. \end{array}\right.$$

Отбрасывая постороннее решение −6,5, получаем, что вторая труба пропускает 10 литров в минуту.

Ответ: 10 литров.

**16. <u>Функции и их свойства. Графики функций.</u>**

Постройте график функции $y = \frac{(x-9)(x^2-9)}{x^2-6x-27}$ и определите, при каких значениях $k$ построенный график не будет иметь общих точек с прямой $y = kx$ .




*Решение.*

1) Найдем область определения функции:

D(y): $x^2 - 6x - 27 \neq 0 \Leftrightarrow (x-9)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 9, \\ x \neq -3 \end{cases}$

D(y) = $(-\infty;\ -3) \cup (-3; 9) \cup (9;\ +\infty)$

2) Преобразуем функцию:

$$y = \frac{(x-9)(x-3)(x+3)}{(x-9)(x+3)} \Rightarrow (y = x - 3, \qquad x \neq -3, y \neq 9)$$

3) График — прямая $y = x - 3$ без двух точек (-3;-6) и (9;6).

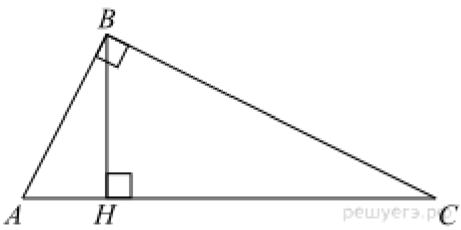
4) Прямая $y = kx$ не будет иметь с построенной прямой общих точек, если она будет ей параллельна, т. е. при $k = 1$, и если она будет проходить через выколотые точки. Через первую из этих точек прямая $y = kx$ проходит, если $k = 2$, а через вторую — если $k = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$; 1; 2.

## Модуль «Геометрия»

**17. Геометрические задачи на вычисления.**

Точка $H$ является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла $B$ треугольника $ABC$ к гипотенузе $AC$. Найдите $AB$, если $AH = 5$, $AC = 20$.




*Решение.*

Поскольку $BH$ — высота треугольника $ABC$, прямоугольные треугольники $ABC$ и $AHB$ подобны.

Следовательно, $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$,

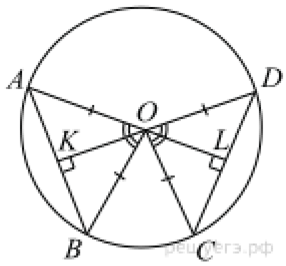
откуда $AB = \sqrt{AC \cdot AH} = 10$.

Ответ: 10.

**18. Геометрические задачи на доказательство.**

В окружности с центром $O$ проведены две хорды $AB$ и $CD$ так, что центральные углы $AOB$ и $COD$ равны. На эти хорды опущены перпендикуляры $OK$ и $OL$. Докажите, что $OK$ и $OL$ равны.

*Решение.*




Треугольники $AOB$ и $COD$ равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO = CO = DO$ как радиусы окружности, $\angle AOB = \angle COD$ по условию). Следовательно, высоты $OK$ и $OL$ равны как соответственные элементы равных треугольников.